Inspectoratul Școlar al Județului Maramureș | **Şcoala Gimnazială „Nicolae Iorga ” Baia Mare**

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a - 26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a V-a – proba pe echipe

1) Determinați suma numerelor naturale cuprinse între 1504 și 2007, care prin împărțire la 28 dau restul 5, iar prin împărțire la 35 dau restul 12.

(G.M. 6 – 7 – 8)

2) Se consideră șirul de numere naturale : 1 , 2 , 3 , 4 , 9 , 10 , 11 , 12 , 17 , 18 , 19 , 20 , … , 2009 , 2010 , 2011 , 2012.

a) Aflați numărul termenilor șirului.

b) Calculați suma termenilor șirului.

3) Determinați numerele naturale a , b , c , x și y, știind că:

$$4 \cdot \left(\overline{abc} + 7^x\right) = 2025 - 6^y \ .$$

4) Un joc este format din 2024 piese, pe care, conform unei reguli, sunt inscripționate patru numere. În tabelul de mai jos sunt exemplificate câteva dintre piesele jocului :

Piesa 1		Piesa 2		Piesa 3		Piesa 4		...	Piesa 9		Piesa 10		...
1	3	2	9	3	5	4	15	...	9	11	10	33	...
6	2	4	3	12	4	6	5		30	10	12	11	

a) Precizați numerele inscripționate pe ultima piesă.

b) Mihai își alege toate piesele pe care sunt inscripționate numerele 24 și 2024. Aflați suma tuturor numerelor inscripționate pe piesele alese de către Mihai.

c) Ella așază primele 27 de piese ale jocului astfel încât numerele identice se suprapun și se formează înșiruirea din care o parte este reprezentată mai jos :

1	3			
6	2	9		
	4	3	5	
		12	4	15
			6	5

...	...		
	...	...	
	...	27	29
		84	28

Determinați suma tuturor numerelor care apar în modelul creat de către Ella.

Conf. univ.dr. HORVAT-MARC ANDREI

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

Inspectoratul Școlar al Județului Maramureș

Școala Gimnazială „Nicolae Iorga ” Baia Mare

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a VI-a – proba pe echipe

1) Să se găsească numerele naturale n pentru care n, $n^2 + 1$, $n^3 + 3$ să fie simultan prime.

2) Determinați cardinalul mulțimii

A=$\{\overline{abcd}$ / $\overline{abcd}+\overline{badc}$ este pătrat perfect$\}$.

(Supliment G.M. 11/2023)

3) Se consideră şirul de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $n \in N^*$ cu proprietatea că $a_1 = 0$ şi a_n este media aritmetică a numerelor a_{n-1} şi 2024. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai şirului.

a) Calculaţi a_2 şi a_3;

b) Arătaţi că $S_{2024} + a_{2024}$ se poate scrie ca produsul a două numere naturale consecutive.

4) Fie semidreptele distincte $(OA$, $(OB$, $(OC$ și $(OD$ pentru care unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt situate în interiorul unghiului ascuțit $\sphericalangle AOD$, cu $(OB$ în interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$, și fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\sphericalangle AOB + 2^n \cdot \sphericalangle BOC + 3^n \cdot \sphericalangle COD = 2^n \cdot 3^{n-1} \cdot \sphericalangle AOD.$$

Determinați mulțimea tuturor punctelor M situate în interiorul unghiului $\sphericalangle BOC$ pentru care are loc egalitatea

$$\frac{\sphericalangle AOM}{\sphericalangle MOB} = \frac{\sphericalangle DOM}{\sphericalangle MOC}.$$

Andrei Horvat-Marc

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

Inspectoratul școlar al județului Maramureș

Şcoala Gimnazială „Nicolae Iorga ” Baia Mare

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a VII-a – proba pe echipe

1) Fie numărul $= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}$. Demonstrați că $0{,}2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0{,}3$.

2) În triunghiul isoscel BC , $\sphericalangle A = 120°$. Fie M mijlocul laturii AB. Perpendiculara din M pe BC intersectează AC în D și $AE \perp BC$, $E \in BC$. Arătați că :
a) triunghiul DAM este echilateral,
b) DAEM este romb ,
c) $CD = 3 \cdot AD$.

3) Aflați numerele $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, știind că $x + \frac{1}{y} = 2$, $y + \frac{1}{z} = 3$ și $xyz = 1$.
(Supliment G.M., octombrie)

4) În interiorul pătratului ABCD fie punctul E astfel încât triunghiul BCE este echilateral. Construim pătratul DEFG astfel încât punctele F și G să fie situate de o parte și de alta a dreptei DC. Fie M pe dreapta BC astfel încât dreptele GM și EC să fie perpendiculare.
a) Arătați că ounctele A , F , C sunt coliniare.
b) Demonstrați că dreptele GM și BF sunt paralele.

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

Inspectoratul Școlar al Județului Maramureș | **Școala Gimnazială „Nicolae Iorga ” Baia Mare**

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANȚE”
Ediția a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a VIII-a – proba pe echipe

1) Pentru jocul D&D se folosește un zar cu opt fețe, fiecare față fiind un triunghi echilateral care conține unul din numerele naturale de la 1 la 8, astfel încât suma numerelor de pe oricare două fețe care nu au puncte în comun să fie aceeași. Privim zarul jocului D&D ca fiind un octaedru regulat, adică un poliedru regulat format din două piramide cu vârfurile V, respectiv S, care au aceeași bază, pătratul $ABCD$, cu $AB = 3$cm, punctele V și S fiind situate de-o parte și de alta a planului (ABC).

a) Pentru zarul folosit în jocul D&D, prezentați o desfășurare plană care să conțină numerele incluse pe fiecare față a zarului.
b) Determinați măsura unghiului format de dreptele VA și SD.
c) Un număr octaedral este numărul de bile identice care pot fi așezate astfel încât să *umple* un octaedru regulat. De exemplu, primele patru numere octaedrale sunt numerele $1, 6, 19, 44$ ... Determinați numărul octaedral cel mai apropiat de 2024.

Conf. Univ. dr. Horvat-Marc Andrei

2) Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile BB' și CC' considerăm punctele M și N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Dacă $MN = 2\sqrt{10}$cm , calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD'.

3) Determinați numerele întregi x și y , știind că verifică relația:

$$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 2023 .$$

(Supliment G.M, 9)

4) Rezolvați ecuația $xyz + 2x + 3y + 6z = xy + 2xz + 3yz + 2227$ în mulțimea numerelor întregi.

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a V-a – proba individuală

1) Comparați numerele a și b, unde :

$a = 13^4 : 13^3 - 5^2 \cdot 5^5 : 5^6 + 17^9 : (17^2)^4 + [59 - 6^2 + 3 \cdot (12^4 : (2^7 \cdot 3^3) - 4)] \cdot 5$

$b = 144 : 12^2 + 19^{41} : (19^2)^{20} - 8^{10} : 4^{14} + 10 \cdot [83 - 9^2 + 6 \cdot (43^5 \cdot 43^6 : 43^{10} - 23)]$.

2) Determinați cifrele a , b și c pentru care următoarea relație este adevărată:

$$3 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot \overline{bc} + c = 2024 .$$

(Supliment G.M. nr. 9)

3) Paul a ales trei cifre a , b , c astfel încât $0 < a < b < c$, apoi a scris toate numerele de două cifre , care se puteau forma cu cifrele alese. Colegul lui , Andrei, după ce a șters cel mai mic dintre numerele scrise , a observat că suma numerelor rămase este pătrat perfect. Aflați cifrele alese.

4) Între clasele a V-a ale unei școli se desfășoară un turneu de fotbal după regulile obișnuite: fiecare echipă dispută câte un meci cu fiecare din celelate echipe, iar în cazul unei victorii , echipa învingătoare prime ște 3 puncte și echipa învinsă nu primește niciun punct, iar în cazul unui meci egal ambele echipe primesc câte un punct. La sfârșitul turneului se constată că numărul total de puncte din clasament este 21. Aflați câte echipe au participat la turneu și câte puncte a luat fiecare echipă.

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

Inspectoratul Școlar al Județului Maramureș

Școala Gimnazială „Nicolae Iorga ” Baia Mare

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a VI-a – proba individuală

1) Numerele naturale 1,2, 3, 4, . . ., 2024 sunt scrise pe cartonașe și așezate cu fața scrisă în jos. Spunem că un cartonaș este ***cu speranță*** dacă numărul scris pe el este divizibil cu 20 sau cu 13. Care este cel mai mic număr de cartonașe pe care trebuie să le întoarcem, fără a privi, pentru a fi siguri că cel puțin unul dintre ele este ***cu speranță***?

2) Fie mulțimile $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ \frac{x+y+6}{x+y}\in\ \mathbb{N},\ x\geq y\right\}$ și

$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ \frac{x+6}{x}\in\mathbb{N}\ și\ \frac{x^2+y^2}{y^2}\in\mathbb{N}\right\}$. Să se calculeze: $A\cap B,\ A-B$ și $B-A$.

3) Pe segmentul (AB) se consideră punctele $M_1, M_2, \ldots, M_{2024}$ astfel încât

$AM_1=\frac{AB}{2}$; $AM_2=\frac{AM_1}{2}$; $AM_3=\frac{AM_2}{2}$; . . .; $AM_{2024}=\frac{AM_{2023}}{2}$

a) Exprimați $AM_1, AM_2, AM_3, AM_4, \ldots, AM_{2024}$ cu ajutorul lui AB.

b) Calculați suma $S=(AM_1+AM_2+AM_3+AM_4+\ldots+AM_{2024})+1$, știind că $AB=2^{2024}$.

4) Considerăm unghiurile ∢ AOB și ∢ BOC adiacente, cu ∢ AOB + ∢ BOC $<180^0$. Notăm cu [OM si [ON bisectoarele unghiurilor AOB, respective BOC, iar cu [OP bisectoarea unghiului MON. Știind că suplementul unghiului AOC este de 4 ori mai mare decât ∢ POB, arătați că unul din unghiurile AOB sau BOC este drept.

G.M.10/2023

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

Inspectoratul Școlar al Județului Maramureș

Şcoala Gimnazială „Nicolae Iorga ” Baia Mare

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a VII-a – proba individuală

1) Se consideră numărul real $a = 2013 - \frac{1+2+3+\cdots+2011}{\sqrt{1+3+5+\cdots+2011}}$.

a) Arătați că a este număr natural.

b) Calculați suma $S = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{2011}$.

c) Arătați că $S = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{2011}$ este divizibil cu 5.

2) Fie $ABCD$ un pătrat , M pe latura BC și $N \in (CD$, astfel încât $D \in NC$ și $BM = DN$.

a) Arătați că $\sphericalangle MAN = 90°$.

b) Dacă alegem punctul P astfel încât $MANP$ să fie pătrat , demonstrați că centrul acestuia este situat pe BD.

3) Se consideră triunghiul ABC, iar M și N proiecțiile punctului A pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor B, respective C ale triunghiului ABC și $MB \cap NC = \{I\}$.

a) Arătați că $(AI$ este bisectoarea unghiului BAC.

b) Arătați că $MN \parallel BC$.

c) Arătați că $MN = p$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.

4) Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$ pentru care $\sqrt{\overline{abc}} = 2 \cdot (a + b + c)$.

(G.M., nr 10)

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**

CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ „TINERE SPERANŢE”
Ediţia a XVII-a,
26 – 27 ianuarie 2024

Clasa a VIII-a – proba individuală

1) a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$2x^2 - y^2 + xy - 5x + y - (x + y - 2)(2x - y - 1) = -2$$

b) Determinați numerele naturale $a, b \in \mathbb{N}^*$ pentru care
$2a^2 - b^2 + ab - 5a + b = 141.$

Conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei

2) Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată. O furnică porneşte din punctul A şi ajunge tot în punctul A, mergând pe fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea drumului parcurs pe fața VAB este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața VBC, determinați măsurile unghiurilor feței VAB.

(Supliment G.M., nr 10)

3) a) Fie x și y două numere reale pozitive. Arătați că :

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \ .$$

b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} .$$

4) Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Printr-un punct M de pe segmentul AB se duce un plan paralel cu *AC* și *BD*. Acest plan intersectează pe *BC* în *Q*, pe *CD* în *P* și pe *AD* în *N*.

a) Să se arate că *MNPQ* este paralelogram.
b) În ce condiții *MNPQ* este dreptunghi?
c) Dacă $AM = x$, $AB = 5cm$, $AC = 12cm$, $BD = 7cm$, să se calculeze, în funcție de *x*, perimetrul patrulaterului *MNPQ*.

SUCCES!

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.**